

**PETRE SIMION
VICTOR NICOLAE**

**VALENTIN NICULA
VASILE DILIMOȚ-NIȚĂ**

Anca Silvia Negulescu • Carmen Angelescu • Angela Simona Bâltac • Daniela Boanță • Victor Bogdan • Gina Cioboată • Alexandru Constantinescu • Maria Dan • Gabriela Dăneț • Tudor Dăneț • Silviu Dilimoț-Niță • Marilena Iliuță • Corina Mihaela Ionescu • Pavel Lazarov • Dorin Marghidanu • Paula Nica • Maria Popescu • Ileana Șerban • Gabriela Tănase • Gabriela Vlad

MATEMATICĂ

clasa a IX-a

**BREVIAR TEORETIC. EXERCII ȘI PROBLEME
PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE.
TESTE SUMATIVE**

■ filiera teoretică ■ profilul real
■ specializarea matematică-informatică

Ediția a II-a revizuită

Consultant:

Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ



NICULESCU

Capitolul I. Mulțimi și elemente de logică matematică.....	8
1. Numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real. Operații cu numere reale. Operații cu numere reale reprezentate prin litere	8
2. Operații cu intervale de numere reale. Aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	13
3. Propoziții logice, operații cu propoziții, predicate, cuantificatorul existențial și universal	20
4. Relații și operații cu mulțimi corelate cu elemente de logică. Probleme de numărare	29
5. Metoda inducției matematice.....	34
Capitolul II. Funcții.....	38
1. Noțiunea de șir; modalități de a defini un șir; șiruri mărginite, șiruri monotone.....	38
2. Tipuri de șiruri: progresii aritmetice, progresii geometrice.....	45
3. Reper cartezian. Drepte în plan de forma $x = m$ și $y = m$, $m \in \mathbb{R}$. Reprezentare grafică	54
4. Definiție, modalități de a descrie o funcție. Graficul unei funcții. Imaginea și preimagea unei mulțimi printr-o funcție. Egalitatea a două funcții, restricții ale unei funcții, lecturi grafice.....	57
5. Funcții numerice. Proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lecturi grafice, paritate, imparitate, simetrie.....	64
6. Periodicitatea și monotonia funcțiilor. Rezolvări grafice de ecuații și inecuații de forma $f(x) = g(x)$, $(\leq, >, <, \geq)$. Funcții mărginite.....	69
7. Compunerea funcțiilor	74
8. Funcția de gradul întâi. Definiție, intersecția graficului cu axele de coordonate, reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$	80
9. Monotonia și semnul funcției de gradul întâi. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($\geq, <, >$).....	85
10. Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute și sisteme de inecuații liniare cu o necunoscută.....	89
11. Funcția de gradul al doilea.....	95
12. Relațiile lui Viète; rezolvarea sistemelor simetrice	100
13. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al doilea. Monotonia	108
14. Puncte de extrem (vârful parabolei). Semnul funcției de gradul al doilea, rezolvarea inecuațiilor de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq 0, > 0, < 0$).....	112
15. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă; poziția relativă a două parabole; sisteme	118

Capitolul I. Noțiuni de geometrie plană. Recapitulare și completări 126

1. Triunghiul, linii importante, puncte importante..... 126
2. Relații metrice, cerc, patrulater inscriptibile, poligoane regulate..... 129

Capitolul II. Calcul vectorial 134

1. Segmente orientate, vectori legați, vectori. Adunarea vectorilor 134
2. Înmulțirea vectorilor cu scalari. Vectori coliniari..... 142
3. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari și nenuli.
Descompunerea unui vector într-un reper cartezian.
Versorul unui vector 148
4. Vectorul de poziție al unui punct în plan. Vectori coliniari..... 156
5. Teoremele lui Thales, Menelaus, Ceva, Sylvester
și a bisectoarei..... 163

Capitolul III. Elemente de trigonometrie 169

1. Unghiuri și arce. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic
(sin, cos, tg, ctg)..... 169
2. Definirea funcțiilor trigonometrice. Semnul și monotonia lor..... 174
3. Paritate, periodicitate. Reducerea la primul cadran. Funcțiile
trigonometrice ale sumei sau diferenței de unghiuri..... 180
4. Formule trigonometrice ale arcului dublu și ale jumătății de arc 186
5. Formule pentru transformarea sumelor și diferențelor în produse 190
6. Produsul scalar a doi vectori. Teorema cosinusului. Condiții de
perpendicularitate 195

Capitolul IV. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului

scalar a doi vectori în geometria plană..... 203

1. Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie 203
2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic și a triunghiului oarecare..... 207

Teste sumative

Teste 1–10 216

Răspunsuri

<i>Algebră</i>	232
<i>Geometrie</i>	296
<i>Teste sumative.....</i>	348
<i>Bibliografie selectivă.....</i>	357

MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real. Operații cu numere reale. Operații cu numere reale reprezentate prin litere

IMPORTANT!

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (se notează $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale!)

Reținem:

- între două numere reale diferite $x < y$ există cel puțin un număr rațional r , și cel puțin un număr irațional α : $x < r < y$ și $x < \alpha < y$;
- oricare ar fi numerele reale $x > 0$ și y , există un număr natural n astfel ca $nx > y$ (axioma lui Arhimede);
- modulul $|x|$ al unui număr x se definește astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x| = \max(x, -x).$$

Proprietățile modulului

- 1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 2) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 3) $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 4) $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}.$
- 5) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- 6) $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- 7) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*.$
- 8) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x = -y.$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci:

- 9) $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = \varepsilon \text{ sau } x = -\varepsilon.$
- 10) $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon].$
- 11) $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty).$

Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Calculați:

a) $3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$;

b) $-2\sqrt{5} + (-6\sqrt{5}) - (-3\sqrt{5})$;

c) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{7} + 3\frac{1}{2} - 2\sqrt{7} + 0,5 + (-\sqrt{7}) - \frac{3}{2}$;

b) $(-7\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{5}(4\sqrt{6} : 2\sqrt{3} - \sqrt{8} + 3\sqrt{2})$.

3. Fie numerele: $a = \frac{1}{2} : \sqrt{0,25} - \frac{\sqrt{192}}{6} + \frac{\sqrt{27}}{9}$ și $b = 1,4 \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}}{5} + \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$.

Arătați că $|a| - |b|$ este un număr întreg.

4. Fie numerele $a = 2\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$ și $b = \sqrt{75} + \sqrt{125}$. Calculați: $a + b$, $a - b$, ab , $2(a + b) - ab$.

5. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = 2\sqrt{3} - 1$ și $b = 2\sqrt{3} + 1$.

6. Să se arate că $a = \left[5\sqrt{3} - \sqrt{108} + \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right)^{-1} + \left| \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right| \right] (1 + \sqrt{3})$ este un număr întreg.

7. Determinați x din egalitatea: $\frac{x+3}{5\sqrt{3}-3} = \frac{5\sqrt{3}+3}{6}$.

8. Calculați: a) $(\sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{-1}$; b) $\frac{30}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}} + 2(\sqrt{2})^{-1}$.

9. Comparați numerele:

a) $\sqrt{5}$ și $\frac{6}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{3\sqrt{48}}{2}$ și $\frac{9}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ și $\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$.

10. Arătați că $a = \frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{2}{\sqrt{7}} \in \mathbb{N}$.

11. Calculați: $\left(\frac{14}{2-\sqrt{11}} + \frac{5}{4+\sqrt{11}}\right) : \frac{1}{\sqrt{11}}$.
12. Aflați x din egalitatea $\frac{4\sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2}}$.
13. Calculați: a) $(x-3)(x^2+3x+9)$; b) $(x-1)(x+4)$; c) $(x-1)(x^2+x+1)$.
14. Calculați: a) $(\sqrt{3+\sqrt{7}} - \sqrt{3-\sqrt{7}})^2$; b) $\sqrt{6\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}}$.
15. Calculați: a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)^2$; b) $(\sqrt{7} + \sqrt{2} - \sqrt{5})^2$.
16. Stabiliți dacă $\left(\frac{x+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = ax$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.
17. Simplificați rapoartele:
- a) $\frac{x^3-1}{x^3+x^2+x}$; b) $\frac{x^3-2x}{x^4-4x^2+4}$; c) $\frac{5x^2+5x}{3x^3+6x^2+3x}$.
18. Rezolvați ecuațiile:
- a) $|2x-1|=7$; b) $|3x+2|=|2-x|$; c) $|x-1|+|x-5|=1$.
19. Rezolvați inecuațiile: a) $|2x-1|<3$; b) $|2x-1|<|3x+2|$.
20. Pentru $a > 0$ și $b < 0$, să se arate că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Efectuați:
- a) $\frac{x}{2x+1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{3x+1}{4x^2-1}$; b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+3} - \frac{2x^2+x}{x^2+x-6}$.
2. Simplificați rapoartele:
- a) $\frac{x^2+6x+9-y^2}{7x+7y+21}$; b) $\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^4+4x^3+3x^2}$; c) $\frac{(x^2-x)(x^2-x+4)+4}{(x^2-x)(x^2-x+1)-2}$.
3. Descompuneți în factori:
- a) $3x^2(x-5) + (5-x) \cdot (x^2+1)$; b) $(2x+1)^2 - (2x+1)(x-3) + (2x+1) \cdot 4x$.
4. Descompuneți în factori:
- a) $(x^2+5x)(x^2+5x-2) - 3$; b) $(x^2+2x+1)(x^2+2x+7) + 9$.

5. Fie $a \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că numărul $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ este pătrat perfect.

6. Calculați media geometrică a numerelor:

a) $a = 7 - 4\sqrt{3}$, $b = 7 + 4\sqrt{3}$; b) $x = 2\sqrt{5} + 4$, $y = 2\sqrt{5} - 4$;

c) $x = (2\sqrt{3} + 1)^2$, $y = 13 - 4\sqrt{3}$.

7. Dacă $x + \frac{1}{x} = 4$, calculați $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

8. Dacă $x + y = 8$ și $xy = 7$, calculați $x^3 + y^3$.

9. Calculați:

a) $x + 2x + 3x + \dots + 20x$; b) $x - 2x + 3x - 4x + \dots + 29x - 30x$.

10. Comparați numerele:

a) $a = \frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{11}}$ și $b = \sqrt{14 + 2\sqrt{33}}$; b) $a = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{21 + 6\sqrt{10}}$.

11. Demonstrați că:

a) $\frac{4}{\sqrt{5} - 2\sqrt{6}} - \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} - 4(\sqrt{3} + 1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) $\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} \right) \cdot (4 + 2\sqrt{3}) \in \mathbb{N}$;

c) $\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{-1} - \frac{6}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{3} \right) \in \mathbb{Z}$.

12. Arătați că $|4\sqrt{3} + |2 - 2\sqrt{3}|| - |2 + \sqrt{108}|$ este un număr întreg divizibil cu 4.

13. Să se arate că $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\sqrt{56}} < 1$.

14. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{1-2x} - \frac{6x}{4x^2-1} \right) : \left(\frac{4x^2-1}{8x} \right)^{-1} \cdot \frac{4x}{x^2+3x};$$

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

d) Calculați $E(\sqrt{3} - 3)$.

15. Se consideră expresia $E(x, y) = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 - 9}{x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 12y + 9}$.

a) Simplificați expresia.

b) Calculați $E(1, 1)$.

16. Dacă $-1 < x < 3$ și $-2 < y < 4$, arătați că numărul $a = \sqrt{(x+y+3)^2} + |x+y-7|$ este natural.
17. Determinați media aritmetică a numerelor naturale a și b care verifică relația:

$$\sqrt{a^2 - a - 12} + \sqrt{b^2 - 3b - 10} = 0.$$
18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $\|x-2|-3|=2$; b) $\|x-3|-5|-9|=8$.
19. Rezolvați ecuația: $|x-1| + |x^2-1| + |x^3-1| + \dots + |x^{2025}-1| = 0$.
20. Demonstrați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

 Când are loc egalitatea?
21. Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ și $a \cdot b \cdot c = 1$, demonstrați că:

$$\frac{a}{2+bc} + \frac{b}{2+ac} + \frac{c}{2+ab} \geq 1.$$
22. Demonstrați că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$|2a+b-1| + |a-2b-3| + |3a-b-5| \geq 1.$$

Exerciții și probleme pentru performanță

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.
- a) Să se arate că $\sqrt{n^2+1} < n + \frac{1}{10}$.
- b) Să se determine prima zecimală a numărului $\sqrt{2025+1}$.
2. Să se calculeze $S = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$.
3. Să se demonstreze inegalitățile:
- a) $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$, $\forall a, b, c > 0$;
- b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, $\forall a, b, c > 0$;
- c) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$, $\forall a, b, c > 0$.
4. Să se calculeze valoarea expresiei: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ pentru $x \in [1, 2]$.
5. Dacă a, b, c, d sunt numere prime diferite, demonstrați că:

$$abc + abd + acd + bcd + 173 < 2abcd.$$